Hydrodynamique [1]

Etablissement de l'équation de Bernoulli :

Dans le chapitre précédent nous avons montré que la pression hydrostatique était égale à :

$p_{(H)} = p_o + \rho \times g \times H$ (pression absolue)

Avec H : hauteur du fluide, po : pression s'exerçant au-dessus de la surface du fluide et ρ : densité du fluide

Considérons maintenant une particule de fluide en mouvement

On a : $\sum \vec{F}\ ext = m \times \vec{a}$

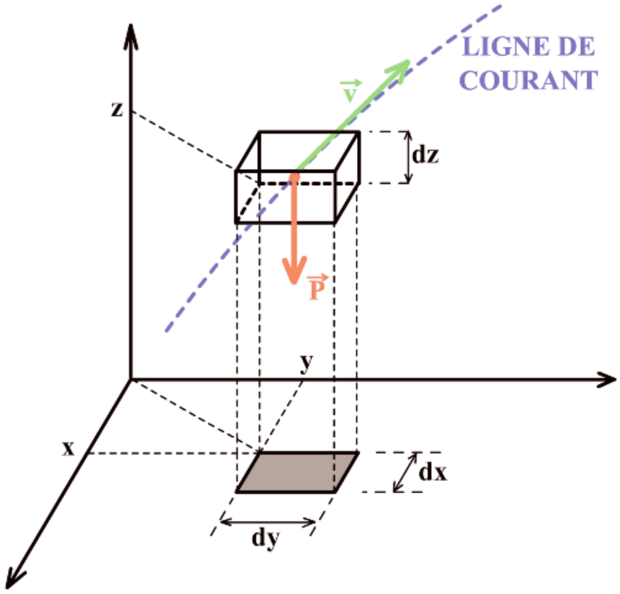
De façon simplifiée :

$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho.\frac{dVx}{dt}$ variation de pression suivant x

$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho.\frac{dVy}{dt}$ variation de pression suivant y

$-\rho.g - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho.\frac{dVz}{dt}$ variations de pression suivant z

Or $dp = \frac{\partial p}{\partial x}.dx + \frac{\partial p}{\partial y}.dy - \frac{\partial p}{\partial z}.dz$ (dérivés partielles)



Soit : $dp = -\rho.\frac{dVx}{dt}.dx - \rho.\frac{dVy}{dt}.dy - \left[\rho.\frac{dVz}{dt} + \rho.g.\right].dz$ (en remplaçant par les expressions précédentes)

Après simplification, on admettra le résultat suivant

dp = -ρ.v.dv – ρ.g.dz

dp + ρ.v.dv + ρ.g.dz = 0 (équation d'Euler)

sous sa forme intégrée on obtient

$\boxed{p + \frac{\rho}{2}.V^2 + \rho.g.Z = constante}$ (équation de Bernoulli)

On appellera $\boxed{p + \rho.g.Z = p^*}$ pression statique (à ne pas confondre avec la pression hydrodynamique)

On appellera $\boxed{\frac{\rho}{2}.V^2}$ pression dynamique

Rappel : $pression = \frac{énergie}{volume} = \frac{puissance}{débit}$

Equivalences électriques :

$\frac{puissance\ électrique}{intensité} = tension$

La tension en électricité est équivalente à la hauteur d'une chute d'eau, l'intensité est équivalente au courant d'eau (débit)

$u = \frac{W=u.i.t}{i.t} = \frac{P=u.i}{Q=i}$!

Hydrodynamique [2]

Autre forme :

$$\boxed{\frac{p}{\rho.g} + \frac{V^2}{2.g} + Z = constante}$$

$\frac{p}{\rho.g}$: hauteur manométrique

$\frac{p}{\rho.g} + Z$: hauteur piézométrique

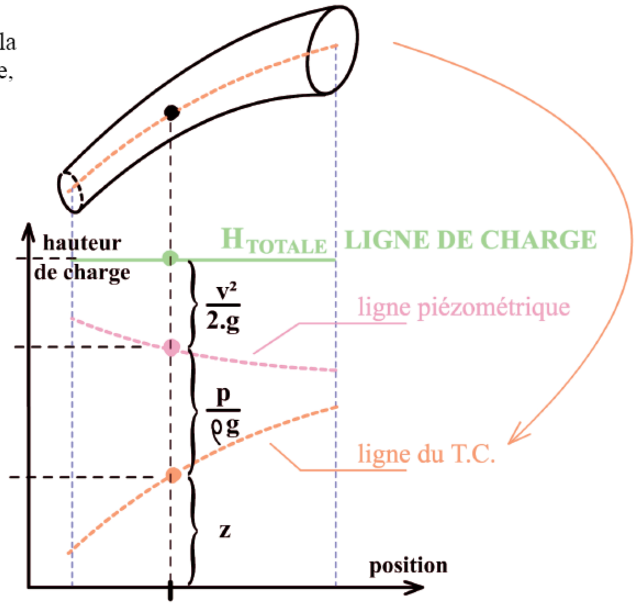
$\frac{V^2}{2.g}$: hauteur capable

Z : altitude

La somme des 3 termes est la charge totale ou hauteur manométrique équivalente

Le bilan en hauteurs permet la construction d'un diagramme,

le diagramme piézométrique :



Hydrodynamique [3]

Forces hydrodynamiques :

Q_m : débit massique : $Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ exprimé en Kg/s

Q_v : débit volumique : $Q_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ exprimé en m^3/s

On notera au passage que : $Q_m = \rho \, . \, Q_v$

Si l'écoulement est stationnaire les débits volumiques et massiques sont constants

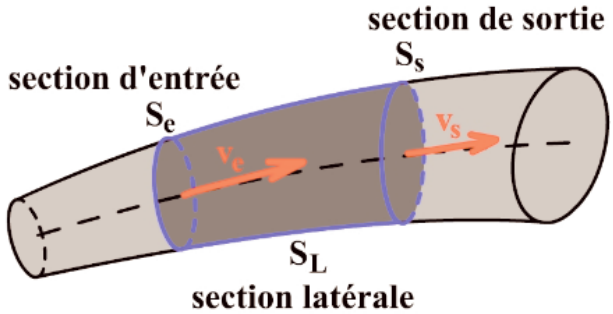
On a : $Q_v = V.S$ avec V en m/s ; S en m²

Rappel :

Equation fondamentale de la dynamique : $\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}} = \boldsymbol{m}.\frac{\boldsymbol{d\vec{V}}}{\boldsymbol{dt}}$

Or m = Q_m . t $\quad \sum \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}}$ =Qm . t (dV/dt) $\quad \boxed{\sum \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}} = \boldsymbol{Q_m}\,.\Delta\vec{\boldsymbol{V}}}$

$\boldsymbol{Q_m}\,(\vec{\boldsymbol{V_s}} - \vec{\boldsymbol{V_e}}) = \sum \overrightarrow{\boldsymbol{F_{ext}}}$ *(théorème d'Euler)*



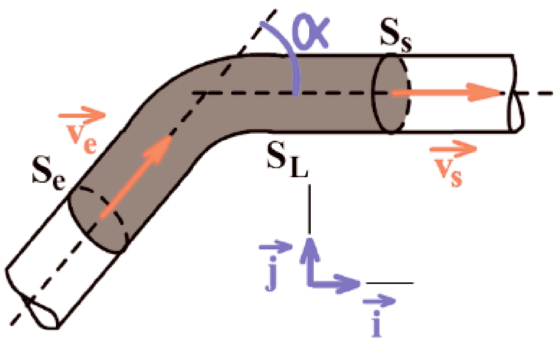
Si on néglige le poids du fluide on obtient :

$\boldsymbol{Q_m}\,(\vec{\boldsymbol{V_s}} - \vec{\boldsymbol{V_e}}) = \vec{\boldsymbol{F_e}} + \vec{\boldsymbol{F_s}} + \overrightarrow{\boldsymbol{F_{c\to f}}}$

D'où

$\overrightarrow{\boldsymbol{F_{c\to f}}} = -\boldsymbol{Q_m}\,(\vec{\boldsymbol{V_s}} - \vec{\boldsymbol{V_e}}) - \vec{\boldsymbol{F_e}} - \vec{\boldsymbol{F_s}}$

Application :



$\vec{F_e} : \begin{vmatrix} p_e.S.cos\alpha \\ p_e.S.sin\alpha \end{vmatrix}$ $\quad \vec{V_e} : \begin{vmatrix} V.cos\alpha \\ V.sin\alpha \end{vmatrix}$

$\vec{F_s} : \begin{vmatrix} -p_s.S \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{V_s} : \begin{vmatrix} V \\ 0 \end{vmatrix}$

$\overrightarrow{F_{c\to f}} : \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \end{vmatrix}$ $\quad Q_m = \rho \, . \, S \, . \, V$

Soit :

$F_x = (\rho \, . \, V^2 + p).S.(1-\cos\alpha)$
$F_y = -(\rho.V^2 + p).S.\sin\alpha$

d'où :

$\overrightarrow{F_{f\to c}} : \begin{vmatrix} (\rho\,.V^2 + p).S.(\cos\alpha - 1) \\ (\rho.V^2 + p).S.\sin\alpha \end{vmatrix}$